ALUMNO:

TIRO OBLÍCUO - MOVIMIENTO PARABÓLICOS - PROYECTILES
PROBLEMAS DE APLICACIÓN

OBJETIVO:

El objeto este TP es aplicar los tipos de funciones que representan a este movimiento y comprender la combinación simultánea de MRUV en el eje vertical y MRU en el horizontal, cuáles son sus constantes y cuáles son sus variables. Se espera que el alumno pueda, a partir de estas ecuaciones, sustituir las constantes por los datos de referencia del problema. También se propone como objetivo que se familiarice con sistemas de referencia y figuras de análisis.

APOYO TEÓRICO:

Hasta ahora hemos estudiado *movimientos uniformes* y *variados*, pero analizados en una sola dirección – Movimientos Rectilíneos Unidireccionales.

En este tema, el objeto que se desplaza, tiene un movimiento que debe ser descripto en dos direcciones, ya que simultáneamente puede, ascender y descender, pero además avanza en la dirección horizontal. Esto se traduce en una trayectoria parabólica, más precisamente en una parábola de 2º grado.

Observamos que el vector de la velocidad va cambiando constantemente de dirección, pero también varía su magnitud, es decir su "rapidez".

Este cambio de dirección, está provocado por la combinación de dos movimientos simultáneos: Un movimiento vertical (sube y baja) y uno horizontal (se traslada). Cómo se trata de un único cuerpo, el movimiento horizontal cesa cuando en la vertical, la posición haya alcanzado el suelo.

Durante el recorrido vertical, la acción de la gravedad hace que el proyectil, que inicialmente subía, se detenga y comience a caer. Se trata entonces de un movimiento no uniforme (la rapidez va modificándose). La causa de esta variación es la aceleración gravitacional "***g***" supuesta constante dentro de ciertos límites de altura.

Planteamos las ecuaciones del movimiento en el eje ***y***, pero al ser ***g*** de valor constante, llegamos a la conclusión que se trata de un Movimiento Uniformemente Variado, para la dirección vertical. Variando las velocidades iniciales, o bien anulándola, generan situaciones particulares como el tiro vertical, caída libre, etc. La ecuación es la que lo representa:

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_{0y}.t - \tfrac{1}{2} g\, t^2 \quad ①}$$

En la dirección horizontal, eje ***x***, no se observan fuerzas que generen aceleraciones, aunque en realidad, la acción del aire produce una desaceleración. Por ahora despreciamos esta influencia. Convenimos entonces que se trata de un Movimiento Rectilíneo Uniforme, cuya ecuación es la siguiente:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_{0x}.t \quad ②}$$

Debemos notar que las dos ecuaciones nos dan como resultado posiciones en función del tiempo.

O sea: $y = f(t)$ y $x = f(t)$

Combinando las ecuaciones de los dos movimientos, se obtiene otra ecuación donde la altura ***y*** (posición vertical) es una función de ***x*** (posición horizontal), o sea $y = f(x)$

Despejando la variable tiempo de una de ellas, y reemplazándolo en la otra, se obtiene la siguiente ecuación.

$$\boxed{y(x) = y_0 + (\mathrm{tg}\ \theta_0).\ x - \tfrac{1}{2}\,(g / v_{0x}^2)\ x^2 \quad ③}$$

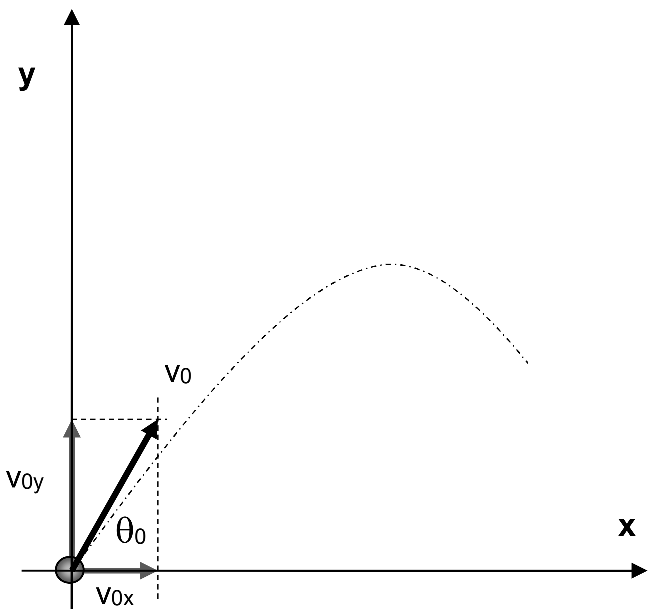
con el eje **y** positivo apuntando hacia arriba

Esta ecuación es de 2do grado, y es la de la parábola que se observa en la trayectoria.

En las ecuaciones ①, ② y ③ aparecen constantes como v_{0y}, v_{0x} y $tg\ \theta_0$, veamos que son cada una de ellas.

En el momento del disparo, el proyectil, lo hace con una velocidad inicial cuyo vector es $\boldsymbol{v_0}$, con una dirección que forma un ángulo $\boldsymbol{\theta_0}$, con la horizontal (eje ***x***). A este vector lo debemos descomponer en las dos direcciones ortogonales ***x*** e ***y*** . La proyección de $\boldsymbol{v_0}$ sobre y nos da como resultado un vector $\boldsymbol{v_{0y}}$, cuya rapidez es la constante de la ecuación ① De idéntico modo $\boldsymbol{v_{0x}}$, será la proyección del vector $\boldsymbol{v_0}$ sobre el eje x , y representa la rapidez constante de la ecuación ②**.**

La siguiente figura muestra lo expresado en el párrafo anterior.



Aplicando trigonometría, obtenemos los valores de las proyecciones:

$v_{0y} = v_0\ .\ sen\ \theta_0$ ④: representa la rapidez de la velocidad con la dirección del eje y
$v_{0x} = v_0\ .\ cos\ \theta_0$ ⑤ : representa la rapidez de la velocidad con la dirección del eje ***x***

Las ecuaciones que rigen la magnitud de la velocidad en función del tiempo $v=f(t)$ en ambos ejes son las siguientes:

Para el eje y (vertical)

$\boxed{v_y(t) = v_{0y}. - g\,t}$ ⑥

y para el eje x (horizontal)

$\boxed{v_x(t) = v_{0x}}$ ⑦

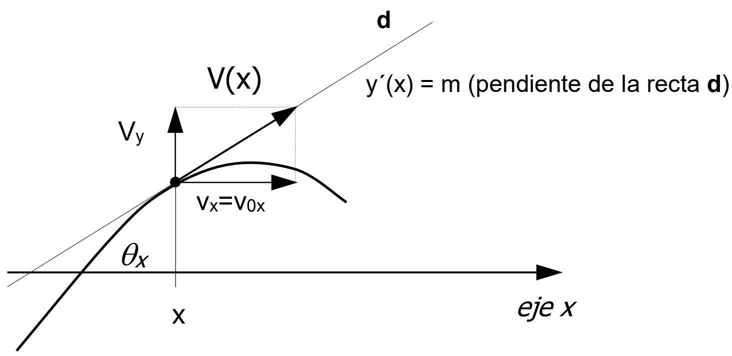
Debemos observar que la rapidez en el eje *x* es <u>constante</u>, ya que siempre vale v_{0x}.

Derivando la ecuación ③: $y(x) = y_0 + (\text{tg}\ \theta_0).\ x - ½\ (g / v_{0x}^2)\ x^2$ respecto de *x* se obtiene una nueva función que nos indica cómo va variando la dirección del vector velocidad en la medida que el proyectil avanza en dirección horizontal (eje x). Esta ecuación es:

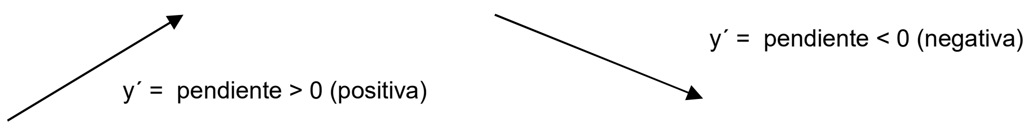
$y'(x) = (\text{tg}\ \theta_0) - (g / v_{0x}^2)\ x$ ⑧, que representa la tg θ_x

Al reemplazar las constantes de esta función y dando a *x,* su valor correspondiente para la posición de la trayectoria, obtenemos un valor numérico (notemos que no tiene unidades). Este valor nos da la pendiente de la <u>*recta dirección*</u> del vector velocidad, es decir, en otras palabras el valor de la tangente trigonométrica del ángulo que forma el vector *v(x)*, con el eje x. Con este valor, por lo tanto, podemos determinar el ángulo del vector θ_x, simplemente utilizando la función arco tangente.

$\theta_x = \text{Arc tg}\ [(\text{tg}\ \theta_0) - (g / v_{0x}^2)\ x]$ ⑨



Como se puede observar, podríamos haber obtenido la dirección (pendiente con su signo) de la recta soporte del vector, conociendo v_y y v_x, calculando el cociente v_y / v_x que es la tangente del ángulo θ_x. Los valores de las velocidades tienen su signo (+ o -) y debemos respetarlos, porque de ellos depende el signo del cociente, y por lo tanto de la tangente. Como comentario, pensemos que una pendiente negativa, implica un vector apuntando hacia abajo, mientras que una positiva da lo contrario, es decir, el vector apunta hacia arriba



PROBLEMA EJEMPLO

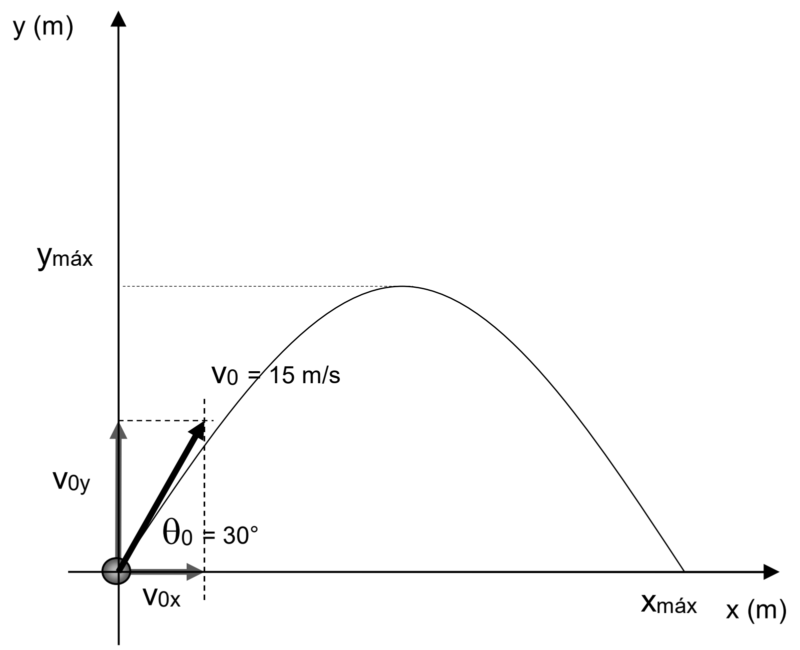
Se patea una pelota desde el piso con una rapidez de 54,000 (km/h) y formando un ángulo con la horizontal $\theta_0 = 30°$. Se desea determinar:

a. Los vectores v_{0y} y v_{0x}
b. La altura máxima alcanzada
c. El alcance máximo
d. El vector de velocidad al 75% del alcance máximo.

Desarrollo del problema

Comenzamos con lo sugerido en el TP 3, respecto al orden para la solución de problemas. Leemos con atención el enunciado, y tratamos de construir la figura de análisis. Allí estableceremos los ejes de referencia, y los datos del problema, que son las constantes conocidas.

Figura de análisis



En esta figura se representa la trayectoria de la pelota. No necesariamente debe ser realizada a escala, simplemente es un croquis que nos ayuda a comprender mejor el enunciado. Colocamos los ejes de referencia en el punto de partida de la pelota de modo que $y_0 = 0$ (m) y $x_0 = 0$ (m).

El eje vertical *y* es positivo hacia arriba, de modo que cualquier vector que tenga ese sentido será también positivo y obviamente hacia abajo será negativo. De allí que la aceleración gravitacional *g* tenga signo negativo [$g = -10\ (m/s^2)$] ya que esta independientemente del signo elegido apunta hacia el centro de la Tierra.

El vector de velocidad inicial $\boldsymbol{v_0}$ es conocido. Su rapidez es de 54 (km/h) o sea 15 (m/s) y su dirección es $\theta_0 = 30°$. Conocemos el valor de la aceleración $a_y = -g$ (10 m/s²)

Seguidamente implementaremos lo sugerido en los puntos 4,5,6 y 7 del TP 3, que no es más que resolver el problema utilizando las ecuaciones del movimiento enunciado.

Comenzamos por el punto **a.** con las expresiones ④ $v_{0y} = v_0 \cdot sen\ \theta_0$ y la ⑤ $v_{0x} = v_0 \cdot cos\ \theta_0$

v_{0y} = 15 (m/s) sen 30° = 15 x 0,500 = 7,50 (m/s) y

v_{0x} = 15 (m/s) cos 30° = 15 x 0,866 = 12,99 (m/s)

Para resolver **b**. tenemos que razonar que cuando se llega a la altura máxima la componente vertical de la velocidad debe valer cero, de lo contrario estaría todavía subiendo o ya bajando, según su signo.

Con la ⑥ $v_y(t) = v_{0y} - g\ t$, reemplazamos las constantes conocidas, y para un determinado tiempo t (incógnita) sabemos que v_y vale cero.

$0 = 7{,}50\ (m/s) - 10\ (m/s^2).t$

Como vemos la única incógnita es el tiempo t que tarda la pelota en llegar a la parte más alta. Se despeja y entonces

$t = 7{,}50/10 = 0{,}75\ (s)$

No debemos olvidar el análisis dimensional, para corroborar que las unidades sean las correspondientes. En este caso el resultado debe dar en segundos.

Con el tiempo empleado en subir, y utilizando la ecuación ①

$y(t) = y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}\ g\ t^2$, se reemplazan los valores y queda expresada así

$y(0{,}75\ s) = 0\ (m) + 7{,}5\ (m/s).\ 0{,}75\ (s) - \frac{1}{2}\ 10\ (m/s^2)\ [0{,}75\ (s)]^2$ cuyo resultado es:

$y(0{,}75\ s) = h_{máx} = 2{,}81\ (m)$

Nuevamente se debe controlar el análisis de unidades, que aquí, lógicamente, debe quedar expresado en metros.

A este mismo resultado habríamos llegado si aplicamos la expresión estudiada en el TP 3, que relaciona el cambio de posición, con la aceleración y las velocidades.

$V_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y\Delta y$, que en este caso quedaría expresada así
$\Delta y = (v_y^2 - v_{0y}^2) / (-2.g)$

V_y en este caso vale cero ya que es en la máxima altura, donde se anula la velocidad.
v_{0y} vale 7,5 (m/s) y
$\Delta y = y_f - y_0$ donde $y_0 = 0$ (m) que es dato del problema. Luego $\Delta y = y_f$ que es la altura solicitada.

Reemplazando queda:

$y_f = 0^2 - [7{,}5\ (m/s)]^2 / [-2.10\ (m/s^2)] = h_{\ máx} = 2{,}81\ (m)$, valor que coincide con lo ya obtenido anteriormente.

En **c**. se nos pide la distancia máxima recorrida en horizontal, es decir el *alcance*.

Para ello disponemos también de dos formas, una utilizando nuevamente la ecuación ①, ya que conocemos el valor de la posición *y* al tocar nuevamente el suelo: y = 0 (m), y de allí despejar el tiempo.
Esta forma, nos lleva a la resolución de una cuadrática, que nos va a dar dos resultados para el tiempo, uno obviamente dará cero (ya que es el tiempo, en donde salió la pelota, donde también y = 0 (m). y la otra solución nos dará el tiempo donde nuevamente y = 0, que es donde cayó la pelota.

Utilizando entonces la ecuación será: 0 (m) = 0 (m) + 7,5 (m/s). t (s) - ½ 10 (m/s²) [t (s)]²

Aplicando la resolvente se tiene: t_1 = 0 (s) y t_2 = 1,5 (s). Este último valor t_2 es el que tarda la pelota en recorrer toda la distancia horizontal, ya que allí la pelota vuelve a tocar el suelo y su posición *y* es 0 (m).

Notemos que en realidad no hubiésemos necesitado este cálculo, porque la segunda forma de calcular el tiempo habría sido simplemente multiplicar por dos el tiempo que tardó en subir (que era de 0,75 (s), porque tardará el mismo tiempo en bajar. 2 x 0,75 (s) = 1,5 (s).

Conocido ahora el tiempo de recorrido horizontal aplicamos la ecuación ② $x(t) = x_0 + v_{0x}.t$, reemplazando a t.

x (1,5 s) = 0 + 12,99 (m/s) x 1,5 (s) y así obtenemos que el alcance es de aproximadamente 19,5 (m) en la horizontal.

Finalmente en **d**. se nos pide determinar el vector ***v*** al 75% del recorrido. Si el recorrido es de 19,5 (m) entonces la posición x para la que deseamos calcular a ***v*** será 0,75 x 19,5 (m) = 14,6 (m) aproximadamente.

Aquí utilizaremos el concepto de y´ para determinar la pendiente de la recta de acción de ***v*** y luego con este valor calcularemos su rapidez y la de sus componentes v_x y v_y. Recordemos que la expresión ⑧ era:

$y'(x) = (\text{tg}\ \theta_0) - (g / v_{0x}^2)\ x$, y reemplazando por los valores nos da

$y'(14{,}6\ m) = \text{tg}(30°) – \{10\ (m/s^2) / [12{,}99\ (m/s)]^2\}\ .14{,}6\ (m) = -0{,}2878$ (adimensional)

Este valor es el de la tangente del ángulo que forma el vector velocidad con el eje x. Como ya se indicó al ser negativa el vector apunta hacia abajo, lo que era de esperar porque al 75 % del recorrido, la pelota ya pasó por su altura máxima y ya está descendiendo.

Nos resta determinar la rapidez de esta velocidad. Sabemos que v_x es constante e igual a v_{0x} que en este problema valía 12,99 (m/s). Este vector y el vector ***v*** forman el ángulo $\theta(x)$, del cual conocemos la tangente. Como v_{0x} es el cateto adyacente y ***v*** la hipotenusa, debemos determinar el coseno de dicho ángulo y despejar el módulo de ***v***.

Arc tg $\theta(x)$ = Arc tg (-0,2878) = - 16,06° y el coseno de ese ángulo vale + 0,961

$\cos\theta(x) = 0{,}961 = v_{0x} / \boldsymbol{v}$ de aquí $v = v_{0x} / \cos\theta(x)$ o sea que

v = 12,99 (m/s) /0,961 = 13,52 (m/s),

que corresponde a la rapidez del vector ***v*** a la distancia de 14,6(m) de haber sido pateada la pelota.

La componente v_y se calcula aplicando el seno del ángulo (-16,06°) o bien por medio de la tangente ya que tg θ= - 0,2878 y como la tangente es v_y / v_{0x} entonces

$v_y = v_{0x}\ .\text{tg}\ \theta$= 12,99 (m/s).(- 0,2878) = -3,75 (m/s),

lo que es razonable porque ahora v_y debe apuntar hacia abajo, ya que la pelota se encuentra cayendo.

Lo que hicimos hasta aquí podría haberse resuelto utilizando las expresiones que tienen en cuenta el tiempo, ya que al 75% del recorrido horizontal, corresponde también un 75% del tiempo de vuelo de la pelota. O sea 0,75 x 1,5 (s) = 1,125 (s). La rapidez v_y será:

v_y(1,125 s) = 7,5 (m/s) – 10 (m/s²) x 1,125(s) = -3,75 (m/s) coincidente con lo calculado arriba.

Conocida v_y y v_{0x} se calcula el módulo de ***v*** aplicando el teorema de Pitágoras:

v = $(v_y^2 + v_{0x}^2)^{1/2}$ = {[-3,75 (m/s)]² + 12,99 (m/s)²} $^{1/2}$ = 13,52 (m/s), también coincidente con lo ya calculado arriba.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

PARA TODO LOS PROBLEMAS TOMAR LA MAGNITUD DE $g = 10\ m/s^2$

PROBLEMA 1

Un rifle dispara una bala con una velocidad inicial de 450,00 (m/s) a una blanco situado a 45,00 (m). ¿A qué altura del blanco debe ser apuntado el rifle para que la bala dé en el blanco?

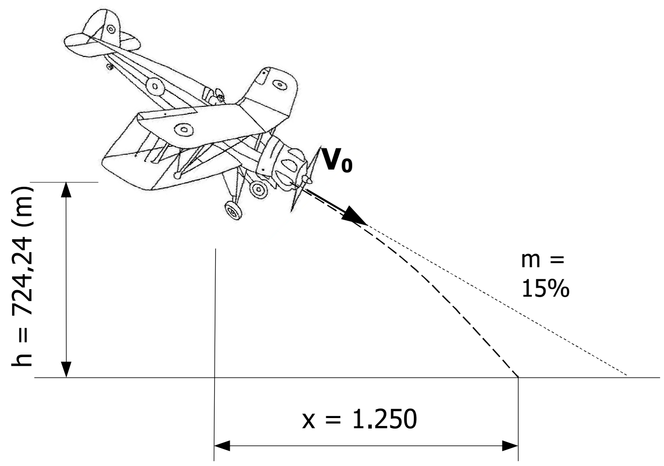
R.: 5 cm por encima del blanco, formando un ángulo θ_0 = 0,0667°= (3´49")

PROBLEMA 2

Un avión con una rapidez $\mathbf{V_0}$, en picada forma una recta con pendiente **m** = 15 %, bajo la horizontal, lanza un proyectil. Si el mismo impacta a una distancia **x** = 1.250,00 (m), desde el punto de lanzamiento.

Determinar la velocidad inicial con que fue lanzado desde una altura **h** = 724,24 (m).

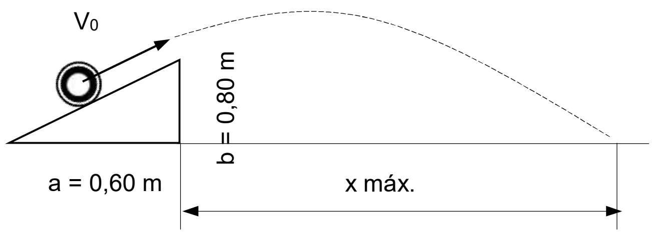
R.: 93,60 (m/s)



PROBLEMA 3

Una bolita avanza sobre una rampa de dimensiones a = 0,60 (m) y b = 0,80) como indica la figura, recorriéndola completamente en un tiempo t = 0,04 (s). Al llegar al borde deja la rampa y comienza una trayectoria parabólica.

a. Determinar x máxima.
b. Determinar el vector **V** a una distancia x = 2/3 del x máxima.



R.: a. $x_{\text{máx.}}$ = 60,59 (m); $^2/_3\ x_{\text{máx.}}$ = 40,40 (m)
b. θ_0 = - 24,8°; v_x = 15,00 (m/s); v_y = - 6,93 (m/s); y la rapidez a ($^2/_3\ x_{\text{máx.}}$) v= 16,52 (m/s)

PROBLEMA 4

Una rueda está rodando horizontalmente y cae desde una barranca a una distancia Δx = 20.000 (m) desde su pie, con una rapidez v_f = 22.361 (m/s) y con un ángulo θ_f = - 63.435° respecto de la horizontal. Determinar:

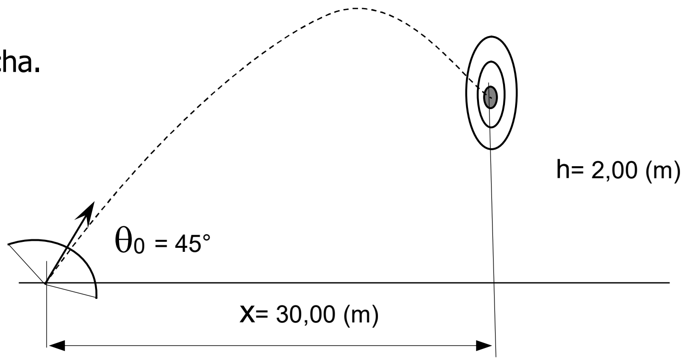
a. Cuál era la velocidad v_0 de salida.
b. Desde que altura cayó

R.: a. 10,000 (m/s)
b. 20,000 (m)

PROBLEMA 5

Se arroja una flecha con un ángulo θ_0 = 45° y debe clavarse en un blanco situado a una altura **h**= 2,00 (m) y a una distancia **x** = 30,00 (m) desde el punto de disparo. Determinar:

a. La rapidez de $\mathbf{V_0}$ (m/s) de salida.
b. La altura máxima alcanzada por la flecha.
c. El vector **V** de impacto.



R.: a. 17,93 (m/s)
b. 8,04 (m/s)
c. θ_0 = - 39,12°; v_x = 12,68 (m/s); v_y = - 10,31 (m/s); y la rapidez v= 16,34 (m/s)

PROBLEMA 6

Si el pitcher (lanzador) de béisbol lanza la bola horizontalmente a 92,00 (mi/h) y a 5,0 (ft) del suelo, ¿puede entrar en la zona de "strike" sobre la base que está a 60,0 (ft) de distancia? Justificar la respuesta.

Para obtener un strike, la bola debe entrar a una altura entre 1,30 (ft) y 3,60 (ft). *Nota: Buscar las equivalencias a las unidades del **Sistema Internacional de Medidas**.*

R.: Si puede.

PROBLEMA 7

Un dardo es arrojado horizontalmente hacia el centro del blanco, punto **P** del tablero, con una velocidad inicial de 10 (m/s). Se clava en el punto **Q** del aro exterior, verticalmente debajo de **P** 0,19 (s) más tarde. Determinar:

a. ¿Cuál es la distancia **PQ**?
b. ¿A qué distancia del tablero estaba parado el jugador?

R.: a. 0,18 (m)
b. 1,90 (m)

PROBLEMA 8

Un proyectil se dispara horizontal desde un cañón ubicado a 45,0 (m) sobre un plano horizontal con una velocidad en la boca del cañón de 250 (m/s.)

a. ¿Cuánto tiempo permanece el proyectil en el aire?
b. ¿A qué distancia horizontal golpea el suelo?
c. ¿Cuál es la magnitud de la componente vertical de su velocidad al golpear el suelo?
d. ¿Qué pendiente tiene la recta de acción (dirección) del vector **v** al golpear el suelo?
e. ¿Qué ángulo forma con la horizontal?

R.: a. 3 (s)
b. 750 (m)
c. – 30 (m/s)
d. – 0,12
e. – 6,84°

PROBLEMA 9

Una pelota rueda desde lo alto de una escalera con un velocidad horizontal de magnitud 2,00 (m/s). Los escalones tienen 20 (cm) de altura y 20 (cm) de ancho.

¿En cuál escalón golpeará primero la pelota? *Sugerencia: Plantear la ecuación de la recta de borde de los escalones y compararla con la parábola de la trayectoria.*

R.: En el 6º Escalón

PROBLEMA 10

Un chico quiere alcanzar una pelota a un compañero que se encuentra en un balcón, situado a una altura de 3,50 (m) desde el piso. El balcón tiene una baranda de 1,00 (m) de altura y se encuentra a una distancia horizontal de 7,00 (m) desde donde se arroja la pelota. La misma deja la mano a una altura de 0,80 (m) y sale con un ángulo θ_0 = 45°, respecto de la horizontal. Determinar la rapidez del vector $\boldsymbol{v_0}$ con que fue lanzada la pelota.

R.: 12,18 (m/s)

PROBLEMA 11

Un jugador de fútbol patea la pelota y ésta viaja en el aire un tiempo de 4,5 (s) y aterriza a 50 (m) de distancia. Si la pelota abandona el pie del jugador a 1,5 (m) de altura sobre el suelo.

a. ¿Cuál era su velocidad inicial (magnitud y dirección)?
b. ¿Cuál será su velocidad final (magnitud y dirección)?

R.: a. 24,80 (m/s) con un ángulo θ_0 = 63,38°
b. 25,39 (m/s) con un ángulo θ_f = - 64,05°

PROBLEMA 12

Una piedra es lanzada hacia arriba, desde un puente, con una rapidez de 3,0 (m/s) y cae en el agua bajo el puente 4,0 (s) más tarde.

a. Determine la altura del punto sobre el puente desde donde la piedra fue lanzada, relativa al agua
b. La rapidez con la que la piedra golpea el agua.

R.: a. Altura de salida sobre el agua h = 65,45 (m)
b. Velocidad de impacto sobre el agua v_y = - 37,0 (m/s)

PROBLEMA 13

Un motociclista arranca sobre una pendiente de cemento que tiene un ángulo de 30º y 10,00 (m) de largo. El motociclista después de recorrer toda la pendiente, vuela y aterriza a 32,2 (m) del punto final de la pendiente. Si la rapidez del motociclista se mantuvo constante durante los 10,00 (m) del recorrido de la pendiente,

a. ¿Qué tiempo t_r empleó para transitarla?
b. ¿Qué tiempo t_a estuvo la moto en el aire?

R.: a. t_r = 0,56 (s)
b. t_a = 2,24 (s)

PROBLEMA 14

Un globo, cuyo diámetro es de 5,0 (m), se encuentra a una altura de 60,0 (m) sobre el piso y ascendiendo con una rapidez constante de 40,0 (m/s). En este instante un cañón que se localiza en el suelo a una distancia horizontal de 50,0 (m) del globo, dispara hacia él con una rapidez de 200,0 (m/s) y un acimut de 55º

a. ¿Pegará la bala en el globo?
b. ¿Si es así en qué parte?
c. Si no; ¿Por cuánto fallará?

R.: a. No
b. No corresponde
c. El centro del globo estará a 6,97 (m) por encima de la posición de paso de la bala.

PROBLEMA 15

El arquero patea la pelota de fútbol con una velocidad inicial de 19,50 (m/s) y un ángulo de 42º sobre la horizontal. El delantero situado a 25,00 (m) en la dirección de la patada comienza en ese instante, a correr para alcanzar a la pelota.

¿Cuál debe ser su rapidez promedio si tiene que atrapar la pelota en el momento antes de que llegue al suelo?

R.: v = 4,91 (m/s)

Bibliografía

Resnick-Halliday-Krane Vol. 1
Bedford-Fowler
Raymond Serway
Sears - Zemansky